UTokyo IST 見QQ

弱点克服 → 概率统计 ☆

寺田(统计)

小黄书(高数保底)

二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

$n<k$, $C_n^k=0$

$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ $\quad C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}$

$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$y=1 \quad =\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ $\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(x+1)^n$

$x=y=1 \quad =2^n$ $\qquad$ 两边求导 $\quad \sum_{k=0}^{n}k\cdot\binom{n}{k}x^{k-1}=n(x+1)^{n-1}$

$x=-1\ y=1 \quad = \quad 0$

广义二项

$\alpha\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}^+$, $\binom{\alpha}{k}:=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ $\quad(|x|<1$, 收敛$)$

多项式系数

$k_1\cdots k_m\in$ 自然数, $n=\sum_{i=1}^{m}k_i$

$\binom{n}{k_1\cdots k_m}=\frac{n!}{\sum_{i=1}^{m}(k_i!)}$ $\qquad$ 把n个不同的物品放入m个盒子，依次有$k_1\cdots k_m$个的方法总数

$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{n=\sum k_i}\binom{n}{k_1\cdots k_m}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m}$

$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$

设$x_n=\lambda^n$

代入 $\lambda^{n+1}=a\lambda^n+b\lambda^{n-1}$

$\lambda^2=a\lambda+b$ 特征方程

A: 2解$\lambda_1\ \lambda_2$, $x_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$

B:

$a_{n+1}=aa_n+ba_{n-1}$，不动点为t，即

$a_n=\alpha t_1^n+\beta t_2^n$

不动点: $\exists x_0$, $f(x_0)=x_0$, 则 $f\cdots f(x_0)=x_0$

对于数列: $x_{n+1}=f(x_n)$, $\exists x_0$, $f(x_0)=x_0$

若 $x_k=x_0$ 为不动点，则有 $f(x_k)=x_{k+1}=x_k$

$f(x_{k+1})=x_{k+2}=x_k$

$\vdots$

$n\geq k$, $f(x_n)=x_k$

① $a_{n+1}=pa_n+q$，不动点x_0

$f(x)=px+q$, $f(x_0)=x_0$

$\Rightarrow x_0=q/1-p$

$a_{n+1}-x_0=pa_n-x_0+q$

$\Rightarrow a_{n+1}-x_0=p(a_n-x_0)$ 等比数列

② $x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$

$\lambda^2=a\lambda+b$ 解得$\lambda_1\ \lambda_2$

i)若有2解$\lambda_1\ \lambda_2$

$\Omega=\{H,T\}$ 样本空间，$\mathcal{F}=\{\{H\},\{T\},\{H,T\},\phi\}$ 事件域，$(\Omega,\mathcal{F})$ 可测空间

$P:\mathcal{F}\longmapsto[0,1]$, s.t. $A\in\mathcal{F}$

① $\forall A\in\mathcal{F}$, $P(A)\geq 0$ ② $P(\Omega)=1$ ③ $A_n\in\mathcal{F}, n=1,2\cdots$ 互不相容，$A_i\cap A_j=\phi$，$P(\bigcup_{i=1}^{n}A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

$(\Omega,\mathcal{F},P)$：概率空间

事件，集合运算：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

$P(A^c)=1-P(A)$ $P(A)=P(AB)+P(AB^c)$

$A\subset B$，$P(A)\leq P(B)$

加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ sp. $A\cap B=\phi$，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

Jordan公式 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$ 对一切下标集合 $(i_1\cdots i_k)$，共 C_n^k 项.

$$\underbrace{P(A_1)+\cdots+P(A_n)}_{n}-\underbrace{P(A_1\cap A_2)-\cdots-P(A_{n-1}\cap A_n)}_{C_n^2}+\underbrace{P(A_1\cap A_2\cap A_3)+\cdots}_{C_n^3}\cdots$$

条件概率

对于 $P(B)>0$，B发生时A发生概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$

事件划分

全概率公式

$B_1 B_2\dots B_n$ 为 Ω 的一个划分，$\forall i$ $P(B_i)>0$，则 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$

证：$A=A\cap\Omega=A\cap\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$

$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$ □

Bayes公式

$A_1\dots A_n$ 是 Ω 的一个划分，$\forall i$，$P(A_i)>0$. $P(B)>0$时，

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}$$

独立性

A与B相互独立，$P(AB)=P(A)P(B)$

A, B, C 相互独立：$P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$ 两两独立

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$$P((\bigcup_{i=1}^{n}A_i)^c)=P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c)$$

A与B相互独立，则 A与B^c，A^c与B，A^c与B^c 相互独立。

证：$P(AB)=P(A)P(B)$

$P(A)=P(AB)+P(AB^c)$

$P(AB^c)=P(A)-P(AB)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(B^c)$ □

组合分析

加法原理 $|X|=n$，$|Y|=m$，$X\cap Y=\phi$，则 $|X\cup Y|=m+n$

乘法原理 ········· 则 (x,y) 有 $m\cdot n$ 个，$x\in X$，$y\in Y$

抽屉原理 鸠の巣原理

容斥原理 见上. $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

排列组合

n 取 m：　不可重复　可重复

	不可重复	可重复
排列	$A_n^m = C_n^m \cdot m!$	n^m
组合	C_n^m	C_{m+n-1}^{n-1}

$a_1, a_2 \cdots a_n$ 分别取 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 个

s.t. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 的所有非负整数解 $(x_i \geq 0)$

$\Rightarrow Y_i = X_i + 1$，$Y_1 + \cdots + Y_n = m + n$ 的所有正整数解　插板法 $\longrightarrow C_{m+n-1}^{n-1}$

e.g. 抛硬币 n 次，第一次正面的概率为 c，第2次之后每一次与前一次同正反的概率为 p，则第 n 次正面的概率

第n次为正：$P_n = P(X_{n-1}\text{正})P(X_n\text{正} \mid X_{n-1}\text{正}) + P(X_{n-1}\text{反})P(X_n\text{正} \mid X_{n-1}\text{反})$

$= P_{n-1} \cdot p + (1-P_{n-1})(1-p) = (2p-1)P_{n-1} + (1-p)$　递推

$P_1 = c$，$P_n = (2p-1)^{n-1}(c - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$

错排问题

n 个对子，至少 1 个错排　$A_i = \{\text{第}i\text{对对子成对}\}$　$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$P(B) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \cdots$　$C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} + C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + \cdots C_n^n \frac{0!}{n!}$

$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$　$(n \to +\infty, \to 1 - \frac{1}{e})$　$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots$

n 个对子，全错排　错排数为 D_n　$D_1 = 0$，$D_2 = 1$

$n \geq 3$ 时，设"1"在第 k 个位置，考虑"k"：

① "k"在 1，$n-2$ 全错排，D_{n-2}

② "k"不在 1，$n-1$ 全错排，D_{n-1}

$\left.\right\}$ $\boxed{D_n = (D_{n-1} + D_{n-2})(n-1)}$　$k: 2 \cdots n$

令 $D_n = n! M_n$，则有：　$M_1 = 0$，$M_2 = \frac{1}{2}$

$nM_n - nM_{n-1} = -M_{n-1} + M_{n-2}$　代入，同除 $(n-1)!$

$M_n - M_{n-1} = -\frac{1}{n}(M_{n-1} - M_{n-2})$　$N_n = -\frac{1}{n}N_{n-1}$，$N_2 = \frac{1}{2}$，累乘

$M_n - M_{n-1} = (-1)^n \frac{1}{n!}$　累加

$M_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$　$\Rightarrow$　$\boxed{D_n = n! \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}}$　$= (1 - P(B))\, n!$

Polya Urn's Model

b 个黑球，r 个红球，取 1 个放回，并再放入 c 个同色球

$B_n = \{\text{第}n\text{次取到黑}\}$，$R_n = \{\text{第}n\text{次取到红球}\}$

e.g. $P(B_1 B_2 R_3) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(R_3 \mid B_1 B_2) = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b+c}{b+r+c} \cdot \frac{r}{b+r+2c} = P\{R_1, B_2, B_3\} = \cdots$　次序无关

前 n 次抽到 k 黑球，$n-k$ 红球：　次序无关，$p = \frac{b(b+c)\cdots(b+(k-1)c)\, r(r+c)\cdots(r+(k-1)c)}{(b+r)(b+r+c)\cdots(b+r+(n-1)c)}$

なんで？