

Row permutation matrix $P^T = P^{-1}$? why

ベクトル
vector

正方形矩阵、对角矩阵、转置矩阵 ($B = {}^t A$)
单位矩阵 (E/I)

寺田马场 易
大学院 中

难

矩阵乘法: $A_{m \times n} \times B_{n \times t} = C_{m \times t}$ A 列 = B 行
 $C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$
 $AB \neq BA$

逆矩阵: 方阵 A s.t. $AX = I$, 则 X 为 A 的逆 $\rightarrow X = A^{-1}$ 求逆: ① 待定系数 (2阶方阵)

可逆矩阵: 正則行列 $AX = XA = I$, 即可交换

矩阵求解: 已知 $YA = B$ 求 Y
 $YA \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$
 $Y = BA^{-1}$

存在条件: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ (2阶方阵)
可交换矩阵:

$$AB = BA \iff A = aI \quad (2阶)$$

证: 必要性 + 充分性

e.g. $A = a \cdot I_n, A^k = n^{k-1} \cdot a^k \cdot I_n$

$k=1, A = a \cdot I_n$ 成立

假设 $k=m$ 成立, $A^m = n^{m-1} \cdot a^m \cdot I_n, I_n^2 = n \cdot I_n$

$$A^{m+1} = A \cdot A^m = a \cdot I_n \cdot n^{m-1} \cdot a^m \cdot I_n = n^{m-1} \cdot a^{m+1} \cdot n \cdot I_n = n^m \cdot a^{m+1} \cdot I_n \quad \square$$

证明: $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, s.t. $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$

$$f(P^{-1}AP) = a_0 + a_1 P^{-1}AP + a_2 (P^{-1}AP)^2 + \dots + a_n (P^{-1}AP)^n \quad (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^n P$$

$$= a_0 P^{-1}I P + a_1 P^{-1}AP + a_2 P^{-1}A^2 P + \dots + a_n P^{-1}A^n P$$

$$= P^{-1} [a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n] P = P^{-1} f(A) P \quad \square$$

分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, C = A \times B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{分块合理}} \begin{cases} C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ \text{下略} \dots \end{cases}$$

行列式

克拉姆法则：解2/3元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = d_2 \end{cases}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \text{s.t.} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{|A|} |\vec{d} \cdot \vec{a}_2| \\ x_2 = \frac{1}{|A|} |\vec{a}_1 \cdot \vec{d}| \end{cases}$$

$$\text{其中 } |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}, \quad k_1, k_2, \dots, k_n = (1, 2, \dots, n) / (2, 1, \dots, n) / \dots$$

交换k次的序列

展开

余子式 D_{ij} (去掉 i 行 j 列的行列式) 代数余子式?